

Teorema del trasporto

Rivediamo l'equazione del teorema del trasporto:

$$\frac{d}{dt} \int_V G dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V G dV + \int_S G \underline{v} \cdot \underline{n} dS$$

In cui:

- $\frac{d}{dt} \int_V G dV$ è la derivata materiale;
- $\frac{\partial}{\partial t} \int_V G dV$ è la derivata locale su un volume di controllo;
- $\int_S G \underline{v} \cdot \underline{n} dS$ è il flusso convettivo.

Lo useremo nei principi che dimostreremo di seguito.

Principio di conservazione della massa

In un volume di controllo:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV}_m + \underbrace{\int_S \rho \underline{v} \cdot \underline{n} dS}_{F_m} = 0$$

Il principio di conservazione della massa globale è dunque:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + F_m^{out} - F_m^{in} = 0$$

E:

- $F_m^{out} = F_m^{in} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial t} = 0 \Rightarrow m = \text{cost.}$
 - $F_m^{out} > F_m^{in} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial t} < 0 \Rightarrow m \downarrow$
 - $F_m^{out} < F_m^{in} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial t} > 0 \Rightarrow m \uparrow$
- } liquido
} gas

Il liquido è incompressibile!

Ricordando la divergenza $\int_S \underline{F} \cdot \underline{n} dS = \int_V \nabla \cdot \underline{F} dV$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho \underline{v} \cdot \underline{n} dS &= \frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \underline{v}) dV = 0 \\ \Rightarrow \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) \right] dV &\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \end{aligned}$$

È la forma locale della conservazione della massa.

$$\text{Se } \rho = \text{cost.} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = \rho \nabla \cdot (\underline{v})$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\underline{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{e } v_x \text{ cresce, } v_z \text{ decresce}$$